

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2026. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszerkesztésekért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

| | | |
|---|---------------|--|
| 1. a) | | |
| Az első egyenlőtlenségben elvégezve a négyzetre emelést: $x^2 - 2x - 15 \leq x^2 - 4x + 4$. | 1 pont | |
| Innen $x \leq 9,5$. | 1 pont | |
| A $2x^2 - 9x - 18 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai $-1,5$ és 6 . | 1 pont | |
| A főegyüttható pozitív, | 1 pont | <i>Ez a pont jár egy megfelelő ábra esetén is.</i> |
| így a második egyenlőtlenség megoldása $x \leq -1,5$ vagy $x \geq 6$. | 1 pont | |
| A két egyenlőtlenség megoldását összevetve az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $x \leq -1,5$ vagy $6 \leq x \leq 9,5$. | 1 pont | $x \in]-\infty; -1,5] \cup [6; 9,5]$ |
| Összesen: | 6 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| 1. b) első megoldás | | |
| Ha Döme x kg almát vásárolt, akkor $x - 1$ kg mandarint vett ($x > 1$). Egy kg alma $\frac{21}{x}$ petákba, egy kg mandarin $\frac{20}{x-1}$ petákba kerül. Megoldandó az alábbi egyenlet: $\frac{21}{x} + \frac{20}{x-1} = 14$. | 2 pont | |
| A közös (nem nulla) nevezővel szorozva: $21(x - 1) + 20x = 14x(x - 1)$. | 1 pont | |
| Rendezve: $14x^2 - 55x + 21 = 0$. | 1 pont | |
| $x = 3,5$ kg almát vett Döme, | 1 pont | |
| kilogrammonként $\frac{21}{3,5} = 6$ petákért. | 1 pont | |
| $x = \frac{3}{7}$ nem megoldás (mert ekkor $x < 1$). | 1 pont | |
| Ellenőrzés a szöveg alapján: Ha Döme $3,5$ kg almát vásárolt, akkor $2,5$ kg mandarint vett, kilogrammonként $(14 - 6 =) 8$ petákért, és így a $2,5$ kg mandarinért valóban 20 petákot fizetett. | 1 pont | |
| Összesen: | 8 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 1. b) második megoldás | | |
| Ha 1 kg alma ára y peták, akkor 1 kg mandarin ára $14 - y$ peták ($0 < y < 14$). Almából $\frac{21}{y}$ kg-ot, mandarinból $\frac{20}{14 - y}$ kg-ot vett Döme. Megoldandó az alábbi egyenlet: $\frac{21}{y} = \frac{20}{14 - y} + 1.$ | 2 pont | |
| A közös (nem nulla) nevezővel szorozva: $21(14 - y) = 20y + y(14 - y).$ | 1 pont | |
| Rendezve: $y^2 - 55y + 294 = 0.$ | 1 pont | |
| $y = 6$ peták 1 kg alma ára, | 1 pont | |
| tehát $\frac{21}{6} = 3,5$ kg almát vásárolt Döme. | 1 pont | |
| $y = 49$ nem megoldás (mert ekkor $y > 14$). | 1 pont | |
| Ellenőrzés a szöveg alapján: Ha 1 kg alma ára 6 peták, akkor 1 kg mandarin ára ($14 - 6 =$) 8 peták, így $\left(\frac{20}{8} =\right)$ 2,5 kg mandarint vett Döme, ami valóban 1 kg-mal kevesebb az alma mennyiségénél. | 1 pont | |
| Összesen: | 8 pont | |

| | | |
|---|--------|--|
| 1. b) harmadik megoldás | | |
| Ha Döme x kg almát vásárolt, akkor $x - 1$ kg mandarint vett ($x > 1$). Egy kg alma ára legyen y peták, ekkor 1 kg mandarin ára $14 - y$ peták. Megoldandó az alábbi egyenletrendszer: $\begin{cases} xy = 21 \\ (x-1)(14-y) = 20. \end{cases}$ | 2 pont | |
| A második egyenletben a zárójel felbontása után xy helyére 21-et behelyettesítve: $14x - 21 - 14 + y = 20.$ Innen $y = 55 - 14x.$ | 1 pont | |
| Ezt az első egyenletbe helyettesítve, majd rendezve: $0 = 14x^2 - 55x + 21.$ | 1 pont | |
| $x = 3,5$ kg almát vett Döme, | 1 pont | |
| kilogrammonként $y = \frac{21}{3,5} = 6$ petákért. | 1 pont | |
| $x = \frac{3}{7}$ nem megoldás (mert ekkor $x < 1$). | 1 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| Ellenőrzés a szöveg alapján: Ha Döme 3,5 kg almáért 21 petákot fizetett, akkor 2,5 kg mandarint vett, kilóját $\left(\frac{20}{2,5} = \right)$ 8 petákért, és így 1 kg alma és 1 kg mandarin árának összege valóban 14 peták. | 1 pont | |
| Összesen: | 8 pont | |

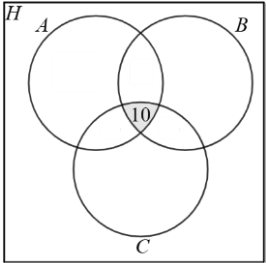
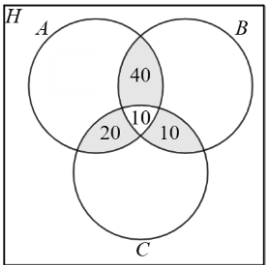
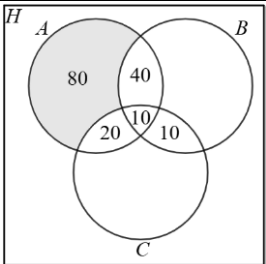
| | | |
|---|---------------|--|
| 2. a) | | |
| 1957-től 2026-ig 69 év telt el. | 1 pont | |
| Az 1957-ben a környezetbe jutott stroncium-90-ből $f(69) = 32 \cdot 0,5^{\frac{69}{29}} \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 6,15$ (gramm) található még még a környezetben 2026-ban. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

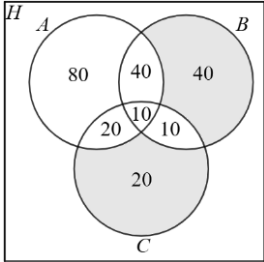
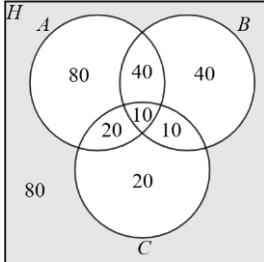
| | | |
|--|---------------|--|
| 2. b) | | |
| (Az exponenciális csökkenés miatt elegendő a változást az első évben megvizsgálni.) $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{m \cdot 0,5^{\frac{1}{29}}}{m} = 0,5^{\frac{1}{29}} \approx$ | 1 pont* | <i>Egy év alatt $0,5^{\frac{1}{29}}$-szere-sére változik a stroncium-90 tömege.</i> |
| $\approx 0,976$ | 1 pont | |
| Tehát $(100 - 97,6 =)$ 2,4 %-kal csökken évente a stroncium-90 tömege. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó (29 évet figyelembe véve) $\sqrt[29]{0,5}$ értékét, vagy (69 évet figyelembe véve) $\sqrt[69]{\frac{6,15}{32}}$ értékét határozza meg.

| | | |
|---|---------------|--|
| 2. c) | | |
| Jelölje t a stroncium-90 környezetbe kerülésétől a 2026-ig eltelt évek számát. Ekkor $33,3 = 50 \cdot 0,5^{\frac{t}{29}}$. | 1 pont | |
| $0,666 = 0,5^{\frac{t}{29}}$ | 1 pont | |
| $\frac{t}{29} = \log_{0,5} 0,666$ | 1 pont | |
| $t = 29 \cdot \log_{0,5} 0,666 \approx 17$ | 1 pont | $t = 29 \cdot \frac{\lg 0,666}{\lg 0,5}$ |
| Tehát $(2026 - 17 =)$ 2009-ben kerülhetett az 50 gramm stroncium-90 a környezetbe. | 1 pont | |
| Összesen: | 5 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 3. a) első megoldás | | |
| A 300-nál nem nagyobb pozitív egész számok közül 2-vel minden második szám, tehát 150 db, 3-mal minden harmadik szám, tehát 100 db, 5-tel minden ötödik szám, azaz 60 db osztható. | 1 pont | |
| 2-vel és 3-mal minden hatodik szám, tehát 50 db, 2-vel és 5-tel minden tizedik szám, tehát 30 db, 3-mal és 5-tel minden tizenötödik szám, azaz 20 db osztható. | 1 pont | |
| Végül 2-vel és 3-mal és 5-tel minden harmincadik szám, azaz 10 db osztható. | 1 pont | |
| A logikaiszita-formula alapján 2-vel vagy 3-mal vagy 5-tel $150 + 100 + 60 - (50 + 30 + 20) + 10 = 220$ db szám osztható. | 1 pont | |
| Így $(300 - 220 =)$ 80 db olyan szám van, amely sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható. | 1 pont | |
| Összesen: | 5 pont | |

| | | |
|---|--------|---|
| 3. a) második megoldás | | |
| Jelölje a (300-nál nem nagyobb) 2-vel osztható számok halmazát A , a 3-mal oszthatókat B , az 5-tel oszthatókat pedig C . 2-vel, 3-mal és 5-tel minden harmincadik szám, azaz 10 db osztható, ezért $ A \cap B \cap C = 10$. | 1 pont |  |
| A csak 2-vel és 3-mal (de 5-tel nem) osztható számok száma: $ (A \cap B) \setminus C = (A \cap B - A \cap B \cap C =) = 50 - 10 = 40$ db. Hasonlóan csak 2-vel és 5-tel (de 3-mal nem) osztható: $ (A \cap C) \setminus B = 30 - 10 = 20$ db, csak 3-mal és 5-tel (de 2-vel nem) osztható: $ (B \cap C) \setminus A = 20 - 10 = 10$ db szám. | 1 pont |  |
| A csak 2-vel (de 3-mal és 5-tel nem) osztható számok száma: $ A \setminus (B \cup C) = (A - (A \cap B) \setminus C - (A \cap C) \setminus B - A \cap B \cap C =) 150 - 40 - 20 - 10 = 80$. | 1 pont |  |

| | | |
|---|---------------|---|
| <p>Hasonlóan csak 3-mal osztható: $B \setminus (A \cup C) = 100 - 40 - 10 - 10 = 40$ db, csak 5-tel osztható: $C \setminus (A \cup B) = 60 - 20 - 10 - 10 = 20$ db szám.</p> | <p>1 pont</p> |  |
| <p>Így $(300 - 10 - 40 - 20 - 10 - 80 - 40 - 20 =)$ 80 db olyan szám van, amely sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható.</p> | <p>1 pont</p> |  |
| <p>Összesen: 5 pont</p> | | |

Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen kitöltött Venn-diagram alapján jól válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

| | | |
|---|---------------|---|
| <p>3. a) harmadik megoldás</p> | | |
| <p>A 2-nek, a 3-nak és az 5-nek a legkisebb közös többszöröse a 30, vizsgáljuk ezért először az első 30 pozitív egész számot.</p> | <p>1 pont</p> | <p><i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i></p> |
| <p>A 30-nál nem nagyobb sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható számok: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 és a 29 (8 db).</p> | <p>2 pont</p> | |
| <p>Ugyanígy 31-től 60-ig 8 db, 61-től 90-ig 8 db, és így tovább, végül 271-től 300-ig szintén 8 db sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható szám van.</p> | <p>1 pont</p> | |
| <p>Tehát a 300-nál nem nagyobb pozitív egész számok között $8 \cdot 10 = 80$ megfelelő szám van.</p> | <p>1 pont</p> | |
| <p>Összesen: 5 pont</p> | | |

| 3. b) | | |
|--|---------------|---|
| Egy megfelelő háromelemű részhalmazban pontosan egy olyan szám szerepelhet, amely 2-vel osztható, de 4-gyel nem, a másik két szám pedig csak páratlan lehet. | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| A 4-gyel nem osztható páros szám a 2, 6, 10, 14, ..., 294, 298 számok közül bármelyik lehet, ami $\binom{300}{4} = 75$ lehetőség. | 1 pont | <i>A 2-től kezdve minden második páros szám nem osztható 4-gyel, így $\frac{150}{2} = 75$ db 4-gyel nem osztható páros szám van.</i> |
| A 150 páratlan szám közül a maradék kettőt $\binom{150}{2} = 11\,175$ -féleképpen választhatjuk ki, | 1 pont | |
| így a H halmaznak összesen $75 \cdot 11\,175 = 838\,125$ megfelelő részhalmaza van. | 1 pont | |
| Összesen: | 4 pont | |

| 3. c) első megoldás | | |
|---|---------------|---|
| H -nak $\binom{300}{299} = \binom{300}{1} = 300$ darab 299 elemű részhalmaza van. | 1 pont | |
| H elemeinek összege páros (mert páros számú páratlan eleme van), így akkor kapunk páros összeget, ha a halmazból egy páros számot hagyunk el. | 1 pont | $S_H = \frac{1+300}{2} \cdot 300 = 45\,150$ |
| Így a H halmaznak 150 darab olyan 299 elemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege páros. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

| 3. c) második megoldás | | |
|---|---------------|--|
| H -ból egy elemet elhagyva kapunk 299 elemű részhalmazt, ezért 300 darab 299 elemű részhalmaz van. | 1 pont | |
| 150 esetben páros, 150 esetben pedig páratlan elemet hagyunk el, ezért a 300 darab részhalmaz felében lesz páros az elemek összege. | 1 pont | |
| Így a H halmaznak 150 darab olyan 299 elemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege páros. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| 4. a) | | |
| A koszinusztételt felírva az ABD háromszög AB oldalára: $AB^2 = 35^2 + 40^2 - 2 \cdot 35 \cdot 40 \cdot \cos 120^\circ =$ | 1 pont | |
| $= 4225$, amiből $AB = 65$ cm valóban. | 1 pont | |
| Összesen: | 2 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| 4. b) | | |
| A Pitagorasz-tételt az ABC háromszög BC oldalára felírva: $BC = \sqrt{65^2 - 39^2} =$ | 1 pont | |
| $= 52$ cm. | 1 pont | |
| $T_{ABC} = \frac{39 \cdot 52}{2} = 1014$ cm ² | 1 pont | |
| $T_{ABD} = \frac{35 \cdot 40 \cdot \sin 120^\circ}{2} \approx 606,2$ cm ² | 1 pont | |
| $T_{ADBC} = 1014 - 606,2 = 407,8$ cm ² | 1 pont | |
| Összesen: | 5 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| 4. c) | | |
| Az érintőnégyszögek szemközti oldalainak összege egyenlő, tehát (a szokásos jelöléssel) $a + c = b + d$. | 1 pont | |
| Ekkor például $s - a = \frac{a+b+c+d}{2} - a = \frac{2a+2c}{2} - a = a + c - a = c$. | 2 pont | <i>Mivel $a + c = b + d = s$, ezért $s - a = c$.</i> |
| Ugyanígy $s - b = d$, $s - c = a$ és $s - d = b$. | 1 pont | |
| Tehát $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} =$ $= \sqrt{cdab} = \sqrt{abcd}$ valóban. | 1 pont | |
| Összesen: | 5 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 4. d) | | |
| Mivel a négyszög érintőnégyszög, ezért a negyedik oldalának hossza $HE = 21 + 42 - 56 = 7$ cm. | 1 pont | |
| A négyszög területe $\sqrt{21 \cdot 56 \cdot 42 \cdot 7} = 588$ cm ² . | 1 pont | |
| Összesen: | 2 pont | |

Megjegyzés: Ha a vizsgázó válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

II.

| | | |
|--|---------------|--|
| 5. a) | | |
| Ha a három tag közül a középső a , akkor a három tag átlaga is $\left(\frac{(a-6)+a+(a+6)}{3}\right)a$. | 1 pont | |
| A három tag szórása: $\sqrt{\frac{(-6)^2+0^2+6^2}{3}} =$ | 1 pont | |
| $=\sqrt{\frac{72}{3}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ valóban. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy konkrét (6 differenciájú) számtani sorozat három egymást követő tagjára igazolja az állítást, akkor ezért 1 pontot kaphat.

| | | |
|--|---------------|--|
| 5. b) | | |
| A feladat szövege alapján megoldandó egyenlet: $ S_n = \left \frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot (-0,2)}{2} \cdot n \right = n$. | 1 pont | |
| 1. eset: $\frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot (-0,2)}{2} \cdot n = n$. 2-vel szorozva és n -nel osztva ($n \neq 0$): $4 + (n-1) \cdot (-0,2) = 2$, | 1 pont | $2n - 0,1n^2 + 0,1n = n$ |
| innen $0,2n = 2,2$, azaz $n = 11$, | 1 pont | $-0,1n(n-11) = 0$ ($n \neq 0$) $n = 11$ |
| 2. eset: $\frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot (-0,2)}{2} \cdot n = -n$. 2-vel szorozva és n -nel osztva ($n \neq 0$): $4 + (n-1) \cdot (-0,2) = -2$, | 1 pont | $2n - 0,1n^2 + 0,1n = -n$ |
| innen $0,2n = 6,2$, azaz $n = 31$. | 1 pont | $-0,1n(n-31) = 0$ ($n \neq 0$) $n = 31$ |
| Ellenőrzés: az 1. esetben $S_{11} = 11$, a 2. esetben pedig $S_{31} = -31$, tehát mindkét érték valóban megfelel. | 1 pont | |
| Összesen: | 6 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| 5. c) | | |
| Jelölje a két keresett számot a és b ($a > 0$ és $b > 0$). Megoldandó az alábbi egyenletrendszer: $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 5 \\ \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 4,8. \end{cases}$ | 2 pont | $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 5 \\ \frac{2ab}{a+b} = 4,8 \end{cases}$ |
| Az első egyenletből $b = 10 - a$, ezt a másodikba helyettesítve: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{10-a}} = 4,8.$ | 1 pont | <i>Az első egyenletből $a + b = 10$, ezt a másodikba helyettesítve: $ab = 24$.</i> |
| $\frac{2}{\frac{10-a+a}{a(10-a)}} = 4,8, \text{ azaz } \frac{2a(10-a)}{10} = 4,8.$ | 1 pont | $b = 10 - a$, amiből $a(10 - a) = 24$. |
| Rendezve: $a^2 - 10a + 24 = 0$. | 1 pont | |
| Ennek megoldásai $a = 4$ (ekkor $b = 6$) vagy $a = 6$ (ekkor $b = 4$), tehát a két szám a 4 és a 6 (ezek megfelelnek mindkét feltételnek), | 1 pont | |
| négyzetes közepük pedig $\sqrt{\frac{4^2 + 6^2}{2}} = \sqrt{26} \approx 5,1$. | 1 pont | |
| Összesen: | 7 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 6. a) első megoldás | | |
| Az állítás igaz. | 1 pont | |
| Ha minden pont fokszáma legalább 2, akkor a gráf fokszámösszege legalább 18, tehát legalább 9 éle van. | 1 pont | |
| Ez több, mint a kilencpontú fagráf éleinek száma (8), így biztosan van benne kör. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 6. a) második megoldás | | |
| Az állítás igaz. | 1 pont | |
| Ha egy összefüggő gráfban nincs kör, akkor az fagráf. Minden fagráfnak van 1-es fokszámú pontja. | 1 pont | |
| Ennek a gráfnak nincs (így ez nem fagráf), tehát van benne kör. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 6. a) harmadik megoldás | | |
| Az állítás igaz. | 1 pont | |
| Kezdjük el bejárni a gráf éleit a gráf egy tetszőleges pontjából kiindulva. Mivel minden pont fokszáma legalább 2, ezért minden új pontból tovább lehet lépni egy korábban még be nem járt élen. | 1 pont | |
| Mivel a pontok száma véges, a bejárás során valamilyen (legkésőbb a kilencedik lépésben) mindenképpen egy korábban már érintett pontba térünk vissza, tehát a gráfban van kör. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 6. b) | | |
| Az állítás megfordítása: Ha egy (kilencpontú, összefüggő, egyszerű) gráfban van kör, akkor minden pontjának fokszáma legalább 2. | 1 pont | |
| Az állítás hamis. | 1 pont | |
| Jó ellenpélda. | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 6. c) első megoldás | | |
| Tegyük fel, hogy mindketten még csak az egymás elleni mérkőzésüket játszották le, tehát a többi 7 játékos még nem játszott egyikükkel sem. | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| A többi 7 játékos egymás közt legfeljebb $\binom{7}{2} = 21$ mérkőzést játszhatott, | 1 pont | |
| így (a Balázs–Attila mérkőzéssel együtt) összesen legfeljebb 22 mérkőzésre kerülhetett volna sor. | 1 pont | |
| Mivel tudjuk, hogy már 23 mérkőzésre sor került, ezért nem lehetséges, hogy Balázs és Attila még csak az egymás elleni mérkőzésüket játszották le. | 1 pont | |
| Összesen: | 4 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 6. c) második megoldás | | |
| A bajnokságban $\binom{9}{2} = 36$ mérkőzésre kerül sor. | 1 pont | |
| Ha Balázs és Attila még csak az egymás elleni mérkőzésüket játszották le, akkor mindkettőjüknek 7-7 mérkőzése még hátravan. | 1 pont | |
| (Mivel ezek között nincsenek azonosak, ezért) ez legalább 14 hátralévő mérkőzést jelent. | 1 pont | |
| De már csak $(36 - 23 =)$ 13 mérkőzés van hátra, ezért nem lehetséges, hogy Balázs és Attila még csak az egymás elleni mérkőzésüket játszották le. | 1 pont | |
| Összesen: | 4 pont | |

| 6. c) harmadik megoldás | | |
|--|---------------|--|
| Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjai a játékosok, élei pedig a már lejátszott mérkőzések. | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| A feltétel szerint a gráfnak 23 éle van, pontjainak fokszámösszege tehát 46. | 1 pont | |
| Ha Balázs és Attila még csak az egymás elleni mérkőzésüket játszották le, akkor a B(alázs) és az A(ttila) pontok fokszáma 1, a többi 7 pont fokszáma pedig legfeljebb 6 lehet. | 1 pont | |
| Egy ilyen gráf fokszámösszege tehát legfeljebb $(2 \cdot 1 + 7 \cdot 6 =) 44$ lehet, ezért nem lehetséges, hogy Balázs és Attila még csak az egymás elleni mérkőzésüket játszották le. | 1 pont | |
| Összesen: | 4 pont | |

| 6. d) első megoldás | | |
|--|---------------|--|
| A bajnokságban összesen $\binom{9}{2} = 36$ mérkőzésre kerül sor. | 1 pont | |
| 36 mérkőzés közül 23-at $\binom{36}{23} (= 2\,310\,789\,600)$ -féleképpen választhatunk ki (összes eset száma). | 1 pont | |
| A 36 mérkőzés között $\binom{3}{2} = 3$ olyan van, amelyen két balkezes játszik egymással, tehát a kedvező esetek azok, amikor a másik 33 mérkőzés közül választjuk ki a 23 mérkőzést. | 1 pont | |
| A kedvező esetek száma $\binom{33}{23} (= 92\,561\,040)$. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott mérkőzések között nincs olyan, amelyen két balkezes játszik egymással, $\frac{\binom{33}{23}}{\binom{36}{23}} \approx 0,04006$. | 1 pont | |
| Tehát nem igaz, hogy ez a valószínűség kisebb, mint $\frac{1}{30} = 0,0\dot{3}$. | 1 pont | |
| Összesen: | 6 pont | |

| 6. d) második megoldás | | |
|---|---------------|--|
| A bajnokságban összesen $\binom{9}{2} = 36$ mérkőzésre kerül sor. | 1 pont | |
| A 36 mérkőzés között 3 olyan van, amelyen két balkezes játszik egymással, tehát annak a valószínűségét keressük, hogy a másik 33 mérkőzés közül választjuk ki mind a 23 mérkőzést. | 1 pont | |
| Válasszuk ki a mérkőzéseket egyesével. Annak a valószínűsége, hogy az első kiválasztott mérkőzés megfelelő, $\frac{33}{36}$. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy ezután a második kiválasztott mérkőzés is megfelelő, $\frac{32}{35}$. És így tovább, annak a valószínűsége, hogy az utolsó (23.) kiválasztott mérkőzés is megfelelő, $\frac{11}{14}$. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott mérkőzések között nincs olyan, amelyen két balkezes játszik egymással, ezek szorzata, tehát $\frac{33}{36} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{31}{34} \cdot \frac{30}{33} \cdot \frac{29}{32} \cdot \dots \cdot \frac{11}{14} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{143}{3570} >$ | 1 pont | |
| $> \frac{119}{3570} = \frac{1}{30}$, ezért nem igaz, hogy ez a valószínűség kisebb $\frac{1}{30}$ -nál. | 1 pont | |
| Összesen: | 6 pont | |

| 7. a) | | |
|------------------|---------------|---|
| A, D, E | 1-1 pont | <i>Minden tévesen megadott betűjelért 1 pont levonás jár.</i> |
| Összesen: | 3 pont | |

| 7. b) | | |
|--|--------|--|
| (A parabola az $[1; 7]$ intervallumon az x tengely „feltett” van, így) a síkidom területe $\int_1^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^7 =$ | 1 pont | |
| $= \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = 114$ területegység. | 1 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| Ha a keresett egyenes egyenlete $x = p$, akkor $\int_1^p x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^p =$ | 1 pont | $\int_p^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_p^7 =$ |
| $= \frac{p^3 - 1}{3} = \frac{114}{2} = 57.$ | 1 pont | $= \frac{7^3 - p^3}{3} = 57$ |
| Innen $p = \sqrt[3]{3 \cdot 57 + 1} = \sqrt[3]{172} \approx 5,56$. (Az egyenes egyenlete tehát $x = \sqrt[3]{172}$.) | 1 pont | $p = \sqrt[3]{343 - 3 \cdot 57} = \sqrt[3]{172}$ |
| Összesen: | 5 pont | |

7. c)

| | | |
|--|---------------|--|
| Mivel a függvénynek 1-ben és 7-ben szélsőértéke van, ezért $g'(1) = g'(7) = 0$. | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| A g deriváltfüggvénye: $g'(x) = 3x^2 + 2bx + c$. | 1 pont | |
| Felírható a következő egyenletrendszer: $\begin{cases} g'(1) = 3 + 2b + c = 0 \\ g'(7) = 147 + 14b + c = 0. \end{cases}$ | 1 pont | |
| A második egyenletből az elsőt kivonva kapjuk, hogy $144 + 12b = 0$, amiből $b = -12$. | 1 pont | <i>Az első egyenletből $c = -2b - 3$, amit a második egyenletbe helyettesítve: $147 + 14b - 2b - 3 = 0$. Ebből $b = -12$.</i> |
| Ezt az első egyenletbe behelyettesítve, majd az egyenletet rendezve $c = 21$. | 1 pont | |
| $g''(x) = 6x + 2b = 6x - 24$ | 1 pont* | <i>A $g'(x) = 3x^2 - 24x + 21$ deriváltfüggvény grafikonja felfelé nyíló parabola, ezért az első derivált 1-nél pozitívból negatívba, 7-nél pedig negatívból pozitívba vált. Tehát az 1 lokális maximumhely, a 7 pedig lokális minimumhely.</i> |
| $g''(1) = 6 - 24 = -18$ $g''(7) = 42 - 24 = 18$ Tehát az 1 lokális maximumhely, a 7 pedig lokális minimumhely. | 1 pont* | |
| Mivel a függvény lokális maximumhelye az 1, így $g(1) = 1 - 12 \cdot 1 + 21 + d = 6$, amiből $d = -4$. (Tehát $g(x) = x^3 - 12x^2 + 21x - 4$.) | 1 pont | |
| Összesen: | 8 pont | |

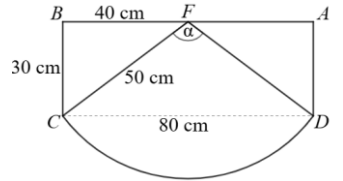
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó arra hivatkozik, hogy ha egy harmadfokú függvény főgyütthetője pozitív, akkor két lokális szélsőérték hely esetén a kisebbik értékhez (tehát a feladatban az $x = 1$ -hez) tartozik a lokális maximum.*

| | | |
|---|---------------|--|
| 8. a) | | |
| A körgyűrűcikk hosszabb sugara ($100 : 2 =$) 50 cm, a rövidebb pedig ($50 - 20 =$) 30 cm. | 1 pont | |
| Így a területe $(50^2\pi - 30^2\pi) \cdot \frac{36^\circ}{360^\circ} =$ | 1 pont | |
| $= 160\pi \approx 503 \text{ cm}^2.$ | 1 pont | |
| Összesen: | 3 pont | |

| | | |
|--|---------------|--|
| 8. b) | | |
| Egy forgatás esetén a nyeremény várható értéke: $1000 \cdot 0,4 + 2000 \cdot 0,1 + 3000 \cdot 0,3 + 4000 \cdot 0,2 =$ $= 2300 \text{ (Ft)}.$ | 2 pont | |
| Összesen: | 2 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| 8. c) | | |
| (Három forgatással 6000 Ft-ot – a forgatások sorrendjétől eltekintve – háromféleképpen érhetünk el.) $A = 2000 + 2000 + 2000,$ ennek valószínűsége: $P(A) = 0,1^3 = 0,001.$ | 1 pont | |
| $B = 3000 + 2000 + 1000,$ és ezeket a nyereményeket 3!-féle sorrendben forgathatjuk ki. $P(B) = 3! \cdot 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,4 = 0,072$ | 2 pont | |
| $C = 4000 + 1000 + 1000,$ és ezeket a nyereményeket 3-féle sorrendben forgathatjuk ki. $P(C) = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,096$ | 2 pont | |
| A kért valószínűség ezek összege, azaz $0,001 + 0,072 + 0,096 = 0,169.$ | 1 pont | |
| Összesen: | 6 pont | |

| | | |
|---|---------------|--|
| 8. d) | | |
| Az 1000 Ft-os nyeremény módosított valószínűségét jelölje $p,$ ekkor a 2000 Ft-os nyeremény módosított valószínűsége $0,5 - p.$ | 1 pont | <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> |
| A várható értékre vonatkozó feltétel alapján: $1000 \cdot p + 2000 \cdot (0,5 - p) + 3000 \cdot 0,3 + 4000 \cdot 0,2 =$ $= 2500.$ | 1 pont | |
| $2700 - 1000p = 2500$ | 1 pont | |
| Így az 1000 Ft-os nyeremény valószínűsége $p = 0,2,$ | 1 pont | |
| a 2000 Ft-os nyeremény valószínűsége pedig ($0,5 - 0,2 =$) 0,3 legyen. | 1 pont | |
| Összesen: | 5 pont | |

| | | |
|--|---------------|---|
| 9. a) | | |
| Jelölje F az AB szakasz felezőpontját. A körszelet körívének sugara Pitagorasz-tétellel: $FC = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ cm. | 1 pont |  |
| A CD ívhez tartozó α középponti szögre $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{40}{30}$, | 1 pont | |
| amiből $\alpha \approx 106,3^\circ$. | 1 pont | |
| A körcikk területe: $\frac{106,3^\circ}{360^\circ} \cdot 50^2 \cdot \pi \approx 2319$ cm ² . | 1 pont | |
| Az FCD háromszög területe: $\frac{80 \cdot 30}{2} = 1200$ cm ² . | 1 pont* | $\frac{50 \cdot 50 \cdot \sin 106,3^\circ}{2}$ |
| A körszelet területe így $2319 - 1200 = 1119$ cm ² , tehát az alaplap területe $80 \cdot 30 + 1119 = 3519$ cm ² . | 1 pont* | |
| Az akvárium térfogata $3519 \cdot 35 = 123\,165$ cm ³ \approx | 1 pont | |
| ≈ 123 liter. | 1 pont | <i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.</i> |
| Összesen: | 8 pont | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|--------|--|
| A BCF háromszög és az AFD háromszög területének összege: $2 \cdot \frac{40 \cdot 30}{2} = 1200$ cm ² . | 1 pont | |
| Az alaplap területe így $2319 + 1200 = 3519$ cm ² . | 1 pont | |

| | | |
|---|---------------|---|
| 9. b) | | |
| A téglatest alaplapjának éleit jelöljük a -val és b -vel. Ekkor a térfogatra felírható: $a \cdot b \cdot 35 = 126\,000 \text{ cm}^3$, | 1 pont | |
| amiből $ab = 3600 \text{ cm}^2$, így $b = \frac{3600}{a}$. | 1 pont | |
| A téglatest felszíne: $3600 + 2 \cdot 35a + 2 \cdot 35b = 3600 + 70a + \frac{252000}{a}$. | 1 pont | |
| Vizsgáljuk a pozitív valós számokon értelmezett $f(a) = 3600 + 70a + \frac{252000}{a}$ függvényt. Ennek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla. | 1 pont* | |
| $f'(a) = 70 - \frac{252000}{a^2} = 0$, | 1 pont* | |
| amiből ($a > 0$ miatt) $a = 60 \text{ cm}$. | 1 pont* | |
| Ha $0 < a < 60$, akkor $f'(a) < 0$, ha pedig $a > 60$, akkor $f'(a) > 0$, ezért ez valóban (abszolút) minimumhelye f -nek. | 1 pont* | $f''(a) = \frac{504000}{a^3} > 0$ minden $a > 0$ esetén. |
| Tehát a felszín akkor minimális, ha $a = 60 \text{ cm}$, és ekkor $b = \frac{3600}{60} = 60 \text{ cm}$ szintén. | 1 pont | |
| Összesen: | 8 pont | |

A *-gal jelölt pontokat a vizsgázó a következő gondolatmenetért is megkaphatja:

| | | |
|--|--------|--|
| A téglatest felszíne akkor minimális, ha $70a + \frac{252000}{a}$ értéke minimális. | 1 pont | |
| A (pozitív számokra felírt) számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $70 \cdot \left(a + \frac{3600}{a} \right) \geq 70 \cdot 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{3600}{a}} = 140 \cdot 60 = 8400$. | 2 pont | |
| Egyenlőség (és a felszínnek minimuma) pontosan akkor van, ha $a = \frac{3600}{a}$. | 1 pont | |